

## 1.2.4 Équations vectorielles

### Définition 1.1.2.37

*Équation vectorielle*

Une équation vectorielle a pour inconnues des réels et pour coefficients des vecteurs :

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_m \vec{v}_m = \vec{b}$$

Elle a le même ensemble de solutions que le système dont la matrice augmentée est

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m & \vec{b} \end{array} \right]$$

où chaque colonne est un vecteur.

**Remarque 1.1.2.38.**  $\vec{b}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  si et seulement si l'équation vectorielle admet une solution.

## 1.2.5 Génération linéaire

### Définition 1.1.2.39

*Espace vectoriel engendré*

Soit  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble des combinaisons linéaires de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  est noté  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  et il est appelé sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ . Autrement dit,  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent sous la forme  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m$  où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ .

**Remarques 1.1.2.40.** 1. Dire que  $\vec{b}$  appartient à  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  revient à dire que la matrice  $\left[ \begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_m & \vec{b} \end{array} \right]$  a au moins une solution.

2. Il y a une infinité de vecteurs dans un ensemble engendré par des vecteurs non tous nuls.

3.  $\text{Vect}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$

4. Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ , alors  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$ . Donc  $\vec{0} \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ .

5.  $\text{Vect}(\vec{v})$  est la droite engendrée par  $\vec{v}$ . C'est la droite qui porte  $\vec{v}$ .

6. Si  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$  ne sont pas colinéaires, alors  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathbb{R}^2$

7. Si  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$  ne sont pas colinéaires, alors  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est un plan dans  $\mathbb{R}^n$  passant par l'origine.

8. Si  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$  sont colinéaires, alors  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est une droite dans  $\mathbb{R}^n$  passant par l'origine.

9. Soit le plan  $\pi$  engendré par  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ . Quelle est l'équation de ce plan ?

On a  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ , ce qui équivaut à  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z \end{bmatrix}$

admet une solution.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & -3 & y - 2x \\ 3 & 6 & z \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & -3 & y - 2x \\ 0 & -6 & z - 3x \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & 3 & 2x - y \\ 0 & -6 & z - 3x \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & 3 & 2x - y \\ 0 & 0 & z + x - 2y \end{bmatrix}$$

Donc l'équation du plan est :  $x - 2y + z = 0$ .

On a donc un moyen très simple de savoir si un point donné est sur ce plan. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \pi, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \notin \pi, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \pi.$$

10. Les ensembles engendrés par des vecteurs peuvent être des ensembles de solutions de systèmes d'équations. Par exemple, pour le système d'équations de  $\mathbb{R}^3$  en  $x, y, z$  suivant :

$$\{z = 0\}$$

La matrice augmentée (échelonnée-réduite) de ce système est

$$[0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

Et l'ensemble de solutions est  $\text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ .

## 1.3 Équations matricielles

Nous entrons maintenant dans le cœur de l'algèbre linéaire : la multiplication de matrices par vecteurs, et les liens avec la résolution de systèmes linéaires. Le but est d'élever le niveau d'abstraction d'un cran, pour avoir une compréhension plus profonde de la résolution de systèmes d'équations linéaires.

### 1.3.1 Produit matrice-vecteur

Revenons au principe de matrice des coefficients d'un système. Soit le système

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

Il peut être écrit comme une égalité vectorielle :

$$\begin{bmatrix} 3x - 2y + 5z \\ 2x + 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, la matrice des coefficients du système est :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

L'idée va être de considérer les trois inconnues  $x, y, z$  comme trois composantes d'un vecteur inconnu  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ . Le système se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Cette notation fait écho à la matrice augmentée du système : c'est une autre manière d'écrire le système, qui ne laisse aucune ambiguïté. Si à l'inverse, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$$

alors il n'y a pas de doute possible, cela correspond au système dont la matrice de coefficients est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

(trois lignes, donc trois équations), donc les inconnues sont  $x, y, z, t$  et dont le second membre est  $\begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$ , autrement dit :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 13 \\ 5x + 6y + 7z + 8t = 14 \\ 9x + 10y + 11z + 12t = 15 \end{cases}$$

Cela peut aussi s'écrire comme une équation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x + 2y + 3z + 4t \\ 5x + 6y + 7z + 8t \\ 9x + 10y + 11z + 12t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Remarquons que l'on a écrit d'une part :

$$\begin{bmatrix} 3x - 2y + 5z \\ 2x + 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et d'autre part : } \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x + 2y + 3z + 4t \\ 5x + 6y + 7z + 8t \\ 9x + 10y + 11z + 12t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Cela motive la définition du produit matrice-vecteur suivante.

#### Définition 1.1.3.41

#### Produit matrice-vecteur

Soit  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$  une matrice de taille  $m \times n$ , et  $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ , alors le

produit de  $A$  et  $\vec{x}$  est

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

#### Remarque importante 1.1.3.42

Attention ! Il est nécessaire qu'il y ait autant de colonnes dans la matrice que de lignes dans le vecteur, pour que ce produit soit possible. Le nombre de lignes de la matrice correspond alors au nombre de lignes dans le résultat, qui est donc un vecteur de  $\mathbb{R}^m$

**Remarque 1.1.3.43.**  $A\vec{x}$  peut être vu comme une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  (qui sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^m$ ), avec les scalaires  $x_i$  :

$$A\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

où les  $\vec{a}_i$  sont les colonnes de  $A$ .

**Exemples.** 1.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 9 \\ 4 \times 7 + 5 \times 8 + 6 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \\ -14 \end{bmatrix}$

3.  $[1 \quad 4 \quad 7] \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = 36$

4.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 38 \\ 7 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$  est impossible.

#### Théorème 1.1.3.44

#### Linéarité du produit matrice-vecteur

Soit  $A$  une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes,  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a alors les égalités suivantes :

1.  $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$
2.  $A(\lambda\vec{u}) = \lambda A\vec{u}$

*Démonstration.* La démonstration s'écrit de manière simple en utilisant la remarque 1.1.3.43.

1. 
$$\begin{aligned} A(\vec{u} + \vec{v}) &= (u_1 + v_1)\vec{a}_1 + \cdots + (u_n + v_n)\vec{a}_n = (u_1\vec{a}_1 + \cdots + u_n\vec{a}_n) + (v_1\vec{a}_1 + \cdots + v_n\vec{a}_n) \\ &= A\vec{u} + A\vec{v}. \end{aligned}$$

2. 
$$\begin{aligned} A(\lambda\vec{u}) &= \lambda A\vec{u} = (\lambda u_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda u_n)\vec{a}_n \\ &= \lambda(u_1\vec{a}_1) + \cdots + \lambda(u_n\vec{a}_n) \\ &= \lambda A\vec{u} \end{aligned}$$

□

**Définition 1.1.3.45***Équation matricielle*

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , alors l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est appelée équation matricielle.

**Théorème 1.1.3.46**

Soit  $A$  une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes notées  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , alors les trois équations suivantes possèdent le même ensemble de solutions :

- l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$
- l'équation vectorielle  $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$
- le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est  $\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n & \vec{b} \end{bmatrix}$

**1.3.2 Existence de solution et nombre de solutions****Théorème 1.1.3.47**

L'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une solution si et seulement si  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $A$ .

*Démonstration.* On a les équivalences suivantes :

l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une solution notée  $\vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow A\vec{s} = \vec{b} \text{ par définition de } \vec{s} \text{ étant une solution de } A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \dots + s_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \text{ est une combinaison linéaire des colonnes de } A \quad \square$$

**Théorème 1.1.3.48**

Soit  $A$  une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes notées  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ , alors les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. L'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une solution pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
2. Tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de  $A$
3. Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^m$
4. La matrice échelonnée réduite associée à  $A$  possède un pivot par ligne.

*Démonstration.* L'équivalence entre 1 et 2 est donnée par le théorème précédent. L'équivalence entre 2 et 3 correspond à la définition de  $\text{Vect}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ .

Montrons maintenant que 1 et 4 sont équivalentes. On a l'équivalence des matrices :  $[A|\vec{b}] \sim [R|\vec{d}]$ .

Supposons que 4 est vraie. Alors chaque ligne de  $R$  a un pivot, et cela implique que le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une solution.

Si 4 est fausse, alors la dernière ligne (au moins) de  $R$  est nulle, ce qui implique que le système  $R\vec{x} = \vec{d}$  n'a pas de solution pour tout  $\vec{d}$  dont la dernière composante est non nulle. Donc 1 est fausse dans ce cas.  $\square$

**Remarque 1.1.3.49.**  $A$  n'a pas forcément un pivot par colonne.

**Exemples.** 1.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ .  $x_3$  est une variable libre (car la troisième colonne de  $A$  n'est pas une variable pivot). On pose  $x_3 = t$  et on a

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - t \\ x_2 = b_2 - t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Vérifions que les affirmations du théorème ?? sont soit toutes vraies, soit toutes fausses.

1 est vrai, car quel que soit  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ , on a une infinité de solutions de la forme  $\vec{s} =$

$$\begin{bmatrix} b_1 - t \\ b_2 - t \\ t \end{bmatrix}.$$

2 est vrai, puisque pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{b} = (b_1 - t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (b_2 - t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

3 est vrai, car  $\text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^2$  et 2 implique que  $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

4 est vrai, car  $A$  est échelonnée réduite.

2.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ . Vérifions que les affirmations du théorème ?? sont soit toutes

vraies, soit toutes fausses.

1 est fausse, car si  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , alors la matrice augmentée du système est  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

et ce système n'a pas de solution.

2 est fausse. En effet, reprenons  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , alors trouver  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que  $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$

$\lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  revient à résoudre le système inconsistant du point 1.

3 est fausse, car il n'est pas possible d'exprimer  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  comme combinaison linéaire des

colonnes de  $A$ . Donc  $\text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$  et cette inclusion est stricte.

4 est fausse, car  $A$  est échelonnée réduite.

#### Corollaire 1.1.3.50

Si un ensemble de vecteurs  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  engendre  $\mathbb{R}^m$ , alors  $n \geq m$ .

*Démonstration.* En effet, la matrice échelonnée réduite de la matrice  $A$  constituée des  $n$  vecteurs colonnes a un pivot par ligne. Elle doit donc avoir au moins autant de colonnes que de lignes.  $\square$

### 1.3.3 Systèmes d'équations linéaires homogènes

**Rappel.** Un système d'équations est dit homogène, si son second membre est nul.

**Remarque 1.1.3.51.** Un système d'équations homogène est consistant, parce que  $\vec{x} = \vec{0}$  est solution du système. On appelle cette solution, la solution triviale.

Nous allons nous intéresser aux solutions non triviales d'un système d'équations homogènes. Cela constitue non seulement une famille de systèmes simples, mais aussi un cas structurant pour tout type de système.

**Exemples.** 1.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  a pour unique solution  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ .

2.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  a une infinité de solutions.  $x_3$  est une variable libre, et si l'on

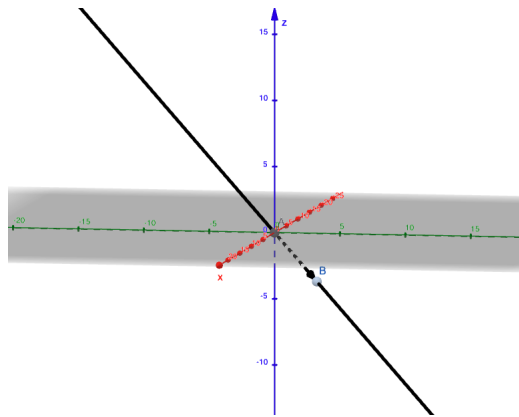
note  $x_3 = t$ , le système a l'ensemble de solutions suivantes :  $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ \frac{-4}{3}t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ .

Remarquons que si  $t = 0$ , alors la solution est triviale. Ces solutions sont toutes sur une même droite passant par l'origine, la droite engendrée par exemple par  $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$  (obtenu avec

$t = -3$ ). On peut donc aussi noter  $\mathcal{S} = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$ .

En choisissant une autre valeur de  $t$ , on aurait un autre vecteur générateur de l'ensemble de solutions, mais le même ensemble. Prenons par exemple  $t = 1$ , alors on a aussi  $\mathcal{S} = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .

Il est important de se convaincre que  $\text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .



#### Remarque importante 1.1.3.52

Remarquons bien que l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{0}$  peut avoir une infinité de solutions. Ce n'est pas le cas de l'équation  $ax = 0$  dans  $\mathbb{R}$  si  $a \neq 0$ .

**Rappel.** On a vu qu'un système d'équations linéaires était forcément dans l'une des situations suivantes :

1. Il n'admet pas de solution.
2. Il admet exactement une solution.
3. Il admet une infinité de solutions.

Donc un système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  est nécessairement dans l'une de ces deux situations :

1. Il n'admet que la solution triviale. Dans ce cas, la forme échelonnée réduite de  $A$  possède un pivot par colonne.
2. Il admet une infinité de solutions. Dans ce cas, la forme échelonnée réduite de  $A$  a une ou plusieurs colonnes sans pivot.

### 1.3.4 Système d'équations non homogène

Nous allons voir dans cette section, que l'ensemble des solutions d'un système de la forme  $A\vec{x} = \vec{b}$  est lié à l'ensemble des solutions du système homogène associé  $A\vec{x} = 0$ .

#### **Théorème 1.1.3.53**

*Solutions d'un système  $A\vec{x} = \vec{b}$*

Soit  $A$  une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes, et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ . Notons  $\mathcal{S}_h$  l'ensemble des solutions de  $A\vec{x} = 0$ . Supposons que le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  est consistant. Soit  $\vec{s}_p$  une solution particulière de  $A\vec{x} = \vec{b}$  (c'est-à-dire  $A\vec{s}_p = \vec{b}$ ).

Alors l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}$  de  $A\vec{x} = \vec{b}$  est

$$\mathcal{S} = \{\vec{s}_p + \vec{s}_h, \vec{s}_h \in \mathcal{S}_h\}$$

Autrement dit, toute solution du système est obtenue en additionnant une solution particulière et une solution du système homogène associé.

*Démonstration.* Nous allons voir que

1. Si  $\vec{s}_h \in \mathcal{S}_h$  alors  $\vec{s}_p + \vec{s}_h \in \mathcal{S}$
2. Si  $\vec{s} \in \mathcal{S}$ , alors il existe  $\vec{s}_h \in \mathcal{S}_h$  tel que  $\vec{s} = \vec{s}_p + \vec{s}_h$ .
  1.  $A(\vec{s}_p + \vec{s}_h) = A\vec{s}_p + A\vec{s}_h = \vec{b} + \vec{0}$
  2. Soit  $\vec{s} \in \mathcal{S}$ , alors on a  $A\vec{s} = \vec{b}$  et  $A\vec{s}_p = \vec{b}$ . Donc  $A\vec{s} - A\vec{s}_p = 0$ . Or  $A\vec{s} - A\vec{s}_p = A(\vec{s} - \vec{s}_p)$ . Donc  $\vec{s} - \vec{s}_p \in \mathcal{S}_h$  et  $\vec{s} = \vec{s}_p + (\vec{s} - \vec{s}_p)$ .

□

**Méthode 1.1.3.54***Résolution d'un système  $A\vec{x} = \vec{b}$* 

Pour résoudre un système  $A\vec{x} = \vec{b}$ , on peut donc suivre la méthode suivante :

1. Trouver une solution particulière  $\vec{s}_p$ .
2. Résoudre le système homogène associé  $A\vec{x} = 0$ .
3. Conclure que toute solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$  s'écrit à partir des étapes 1 et 2.

Cela est utile s'il y a une solution particulière connue par ailleurs ou évidente.

**Exemples.** Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Résolvons  $A\vec{x} = \vec{b}$

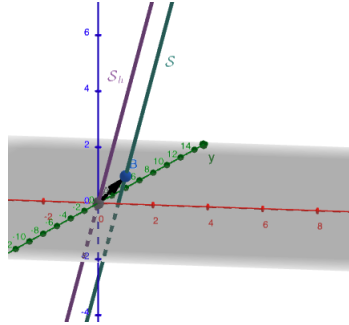
1. Le vecteur  $\vec{s}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  est solution du système.
2. Résolvons le système  $A\vec{x} = 0$  en cherchant la réduite de Gauss de  $A$ . Après calcul, on obtient  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , donc  $\vec{0}$  est l'unique solution du système homogène associé.
3. Donc il n'y a qu'une solution à  $A\vec{x} = \vec{b}$ ,  $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Soit  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Résolvons  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

1. Remarquons que  $\vec{s}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  est solution du système.
2. Résolvons  $A\vec{x} = 0$ . Pour cela, cherchons la réduite de Gauss de  $A$ . Après calcul, on obtient  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . On a donc  $x_3$  qui est une variable libre, notons  $x_3 = t$ , et  $\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5t}{13} \\ \frac{-7t}{13} \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix} \right)$ .
3. On a donc  $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

**Remarque 1.1.3.55.** Graphiquement, cela signifie que l'ensemble des solutions d'un système de la forme  $A\vec{x} = \vec{b}$ , est un translaté de l'ensemble des solutions de  $A\vec{x} = 0$ . Le vecteur de

translation est  $\vec{s}_p$ .



## 1.4 Bases de $\mathbb{R}^n$

### 1.4.1 Dépendance et indépendance linéaire

#### Définition 1.1.4.56

*Ensemble de vecteurs linéairement indépendants*

Soit  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ ,  $m$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que l'ensemble  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  est linéairement indépendant (ou libre) si l'unique solution de l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

est la solution triviale  $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ .

Dans le cas contraire, l'équation  $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_m \vec{v}_m = \vec{0}$  admet une infinité de solutions,

et l'ensemble de vecteurs est dit linéairement dépendant (ou lié).

Il existe alors des coefficients non tous nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  tels que

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

et cela s'appelle une relation de dépendance linéaire.

En pratique, déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement libre ou lié reviendra à résoudre un système d'équations linéaires.

**Exemples.** 1. Les vecteurs  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  sont linéairement indépendants, car si  $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ alors } x_1 = x_2 = 0.$$

2. Les vecteurs  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  sont-ils linéairement indépendants ?

Pour répondre, résolvons l'équation vectorielle suivante :

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour ce faire, réduisons et échelonnons la matrice suivante  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ .

Après calculs, nous obtenons la matrice échelonnée réduite suivante :  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Ce qui

implique que dans l'équation vectorielle,  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , donc le système de vecteurs

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$  est linéairement indépendant.

3. Les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$  sont-ils linéairement indépendants ?

Nous avons deux manières de répondre.

- (a) La première est de remarquer que  $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , donc  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$ , donc

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  n'est pas un ensemble de vecteurs indépendants.

- (b) Si nous n'avons pas immédiatement remarqué cette égalité de vecteurs, nous pouvons réduire et échelonner la matrice  $\begin{bmatrix} 8 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ . Ce qui donne  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Or

cette matrice est la matrice des coefficients d'un système homogène à une infinité de solutions, donc on peut en déduire que l'ensemble de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est dépendant. Nous pouvons même aller plus loin et mettre en évidence la dépendance. La matrice échelonnée réduite indique que  $x_3$  est une variable libre, et que  $x_1 = -x_3$  et  $x_2 = -x_3$ , donc l'équation vectorielle  $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}$  se résout en

$x_1 = -t, x_2 = -t, x_3 = t$  et choisir  $t = -1$  équivaut à la relation d'équivalence illustrée dans la réponse (a).

#### Méthode 1.1.4.57

La remarque précédente constitue une méthode générale pour déterminer si un ensemble de vecteurs est libre ou lié.

**Observation** Parfois, une relation de dépendance apparaît comme évidente, lorsque le nombre de vecteurs est petit et que les coefficients sont simples (entiers compris entre  $-2$  et  $2$ , par exemple). Parfois, l'indépendance des vecteurs est évidente, par exemple si les vecteurs ont des coordonnées en escalier, mais dans ce cas-là, il faut quand même fournir

une justification en utilisant la deuxième méthode. Par exemple :  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ .

**Algorithme de Gauss-Jordan** Construire une matrice  $A$  dont les colonnes sont les vecteurs considérés, puis résoudre  $A\vec{x} = \vec{0}$ . L'ensemble de vecteurs est libre si et seulement si la seule solution est  $\vec{x} = \vec{0}$ . Cette méthode est évidemment celle qui fonctionnera toujours.

**Le théorème 1.1.4.60** sera particulièrement puissant dans certains cas.

**Remarques 1.1.4.58.** 1. Nous pourrions parler de colonnes d'une matrice qui sont linéairement dépendantes ou indépendantes. Soit  $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ , alors on a les équivalences suivantes (faire le raisonnement pour s'en convaincre !)

- (a)  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  est libre  $\Leftrightarrow$  le système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  n'admet que la solution triviale.
- (b)  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  est lié  $\Leftrightarrow$  le système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  admet une infinité de solutions.
2.  $\{\vec{v}\}$  est lié si et seulement si  $\vec{v} = \vec{0}$ .
3. Tout ensemble de vecteurs contenant le vecteur nul est linéairement dépendant.
4.  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  est lié si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**Théorème 1.1.4.59**

Un ensemble de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  est lié si et seulement si au moins un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres.

*Démonstration.* Supposons que  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  est lié. Alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  non tous nuls, tels que  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$ . Si nécessaire, réordonnons les vecteurs de sorte que  $\lambda_m \neq 0$ . Dans ce cas, on peut réécrire  $\lambda_m \vec{v}_m = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{v}_{m-1}$ , donc  $\vec{v}_m = \frac{1}{\lambda_m} (\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{v}_{m-1})$

Supposons maintenant que l'un des vecteurs au moins soit combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte à réordonner, que c'est  $v_m$  :  $\vec{v}_m = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{v}_{m-1}$ . Cet ensemble de vecteurs est donc lié, puisque  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{v}_{m-1} - \vec{v}_m = \vec{0}$ . Le dernier coefficient étant  $-1$ , les  $\lambda_i$  sont non tous nuls.  $\square$

**Exemple.** Considérons les vecteurs  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . On a alors la relation d'équivalence :  $2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et la combinaison linéaire } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Théorème 1.1.4.60**

Tout ensemble de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est linéairement dépendant si  $m > n$ .

*Démonstration.* Considérons la matrice  $A = [\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_m]$ . Cette matrice a plus de colonnes que de lignes, les colonnes ne peuvent donc pas toutes être des colonnes pivots. Il y a donc des variables libres, donc des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres.  $\square$

**Exemple.**  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$  est un ensemble lié de vecteurs, puisqu'il y a quatre vecteurs de dimension trois.